

УДК 519.63.001.57

**А. Я. Бомба\***, д-р техн. наук, професор,**О. М. Гладка\*\***, аспірант

\*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,

\*\*Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

## МОДЕЛЮВАННЯ ЗВОРОТНЬОГО ВПЛИВУ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ НАФТИ НА ПРОНИКНІСТЬ ПЛАСТА

На основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції двов'язних обмежених еквіпотенціалами областей розроблено новий ефективний конструктивний підхід до математичного моделювання процесів витіснення вуглеводнів із пласта за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища та ідентифікації параметрів моделі.

**Ключові слова:** квазіконформні відображення, комплексний квазіпотенціал, метод сумарних зображень, декомпозиція задачі, ідентифікація параметрів.

**Вступ.** Проблема моделювання зворотнього впливу процесу витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових покладів на вихідні характеристики середовища полягає в адекватному математичному описі змін фільтраційно-ємнісних характеристик пластів, що відбуваються в процесі експлуатації свердловин. Так, в окремих зонах пори породи можуть закупорюватися механічними домішками, парафінами чи смолистими речовинами, проходить процес утворення і накопичення осаду завислих частинок (кольматаж), що призводить до зменшення коефіцієнта проникності і пористості середовища. Як правило, у навколосвердловинних зонах є багато тріщин, розміри яких у значній мірі залежать від режиму роботи свердловин і суттєво впливають на проникність пласта. Окрім цього, у присвердловинних зонах може відбуватися зміна фільтраційних характеристик породи за рахунок переміщення (вимивання) дрібних її частинок (суфозії), що також зумовлює зміну проникності середовища.

У роботах [1–2] авторами розроблено новий конструктивний підхід на основі синтезу методів комплексного аналізу [3], сумарних зображень [4–5] та декомпозиції задачі до моделювання таких процесів для однорідних і шаруватих пластів. Окрім цього, у роботах авторів описано розроблений ними метод ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, для нелінійно-шаруватих і нелінійно дво-яко-шаруватих пластів. Формально ці підходи можна поширити і на

випадки двозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (контуром свердловини і контуром живлення свердловини), із зонально неоднорідним середовищем. Проте, для ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності і характерних значень потенціалу та функції течії на лініях розділу шарів передбачалася наявність відомих (вимірних) даних на границі області. Але, за методикою [3], ділянками границі області є береги умовного розрізу, що проходить вздовж деякої лінії течії, яка знаходиться у процесі розв'язання задачі і є заздалегідь невідомою, та й, загалом, отримання необхідних даних про нафтовий пласт за межами свердловин є дуже проблематичним.

У цій роботі розглядається ізотермічна стаціонарна фільтрація рідини, що не стискається, у горизонтальному неоднорідному елементі нафтового пласта, який містить одну діючу експлуатаційну свердловину і кілька довільним чином розміщених не діючих свердловин, з яких отримуються необхідні дані. Вважатимемо, що на стадії проектування і початковому етапі розробки родовища був встановлений деякий закон розподілу проникності продуктивного пласта, який в процесі експлуатації покладу у зв'язку із отриманими новими даними та через зміни фільтраційних характеристик породи потребує уточнення.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес фільтрації нафти у горизонтальному пласті-колекторі за жорсткого водонапірного режиму, якщо відповідна фізична область  $G_z$  ( $z = x + iy$ ) обмежена гладкими замкнутими кривими (еквіквзіпотенціалами):  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  — контуром свердловини і  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  — контуром її живлення. У пласті є  $s_1$  точкових не діючих свердловин  $R_*^{(q)}(x_*^{(q)}, y_*^{(q)})$ , в яких задані (виміряні) значення квазіпотенціалу (тиску, напору)  $\varphi_*^{(q)}$  ( $q = \overline{1, s_1}$ ). А також відомі значення локальних фільтраційних витрат  $Q_*^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s_2}$ ) через ділянки  $L_*^{(l)}$  контуру свердловини  $L_*$  між заданими точками  $H_*^{(l)}(x_*^{(l)}, y_*^{(l)})$ .

Для стаціонарної фільтрації, що підпорядковується закону Дарсі

$$\vec{v} = \frac{\kappa}{\mu_n} \cdot \text{grad } \varphi, \text{ процес витіснення описуємо рівнянням}$$

$$\text{div}(\kappa_f \text{grad } \varphi) = 0,$$

де  $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  — швидкість фільтрації,  $\varphi$  — потенціал швидкості, такий, що  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ ,

$\kappa_f = \kappa/\mu_n$  — коефіцієнт фільтрації,  $\mu_n$  — динамічна в'язкість нафти у пластових умовах.

Коефіцієнт проникності продуктивного пласта  $\kappa = \kappa(x, y)$  — невідома кусково-стала функція, що підлягає визначенню, із розривами вздовж шуканих еквіпотенціальних ліній  $L_*^{(q)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(q)}\}$  ( $q = \overline{1, s_1 - 1}$ ) і шуканих ліній течії  $L_0^{(l)} = \{z \in G_z : \psi = \psi^{(l)}\}$  ( $l = \overline{1, s_2 - 1}$ ) (за виконання умов неперервності потенціалу і потоку на них) — задається таким чином:

$$\kappa(x, y) = \kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \tilde{\kappa}^{(q)} \cdot \check{\kappa}^{(l)}, \quad \begin{cases} \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, \\ q = \overline{1, s_1}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} = \\ \psi^{(l-1)} + Q_l, \quad l = \overline{1, s_2}, \end{cases}$$

де  $\psi = \psi(x, y)$  — функція течії, комплексно спряжена до  $\varphi$ ,  $\tilde{\kappa}^{(q)}, \check{\kappa}^{(l)}$  — шукані дійсні додатні числа,  $Q_l = \int_{\tilde{L}_0^{(l)}} -v_y dx + v_x dy$  — лока-

льні фільтраційні витрати через лінії  $\tilde{L}_*^{(l)} = \{z \in L_* : (x, y) \in [H^{(l-1)}, H^{(l)}], H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_0^{(l)} \cap L_*\}$ , причому, мають місце умови:

$$\begin{aligned} \varphi_* < \varphi_*^{(1)} < \varphi^{(1)} < \varphi_*^{(2)} < \varphi^{(2)} < \dots < \varphi^{(q-1)} < \varphi_*^{(q)} < \varphi^{(q)} < \dots < \\ < \varphi^{(s_1-1)} < \varphi_*^{(s_1)} < \varphi^*, \quad 0 < \psi_*^{(1)} < \psi^{(1)} < \psi_*^{(2)} < \psi^{(2)} < \dots < \psi^{(l-1)} < \\ < \psi_*^{(l)} < \psi^{(l)} < \dots < \psi^{(s_2-1)} < \psi_*^{(s_2)} < Q \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\psi_*^{(1)} = Q_*^{(1)}, \psi_*^{(l)} = \psi_*^{(l-1)} + Q_*^{(l)}, Q = \sum_{l=1}^{s_2} Q_*^{(l)}).$$

Як і у [1–3], зробивши умовний розріз  $\Gamma$  вздовж шуканої лінії течії, що проходить через точку  $H_*^{(1)}(x_*^{(1)}, y_*^{(1)})$ , і отримавши одноп'язну область  $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ , приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне («кусково-конформне») відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  області

$$G_z^\Gamma = \left( \bigcup_{q,l=1}^{s_1, s_2} G_z^{(q,l)} \right) \cup \left( \bigcup_{q=1}^{s_1-1} L_*^{(q)} \right) \cup \left( \bigcup_{l=1}^{s_2-1} L_0^{(l)} \right)$$

$$(G_z^{(q,l)} = \{z \in G_z : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\})$$

на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу

$$\begin{aligned} G_\omega &= \left\{ \omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \right\} = \\ &= \left( \bigcup_{q,l=1}^{s_1, s_2} G_\omega^{(q,l)} \right) \bigcup \left( \bigcup_{q=1}^{s_1-1} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \bigcup \left( \bigcup_{l=1}^{s_2-1} L_{\omega^0}^{(l)} \right) \\ (G_\omega^{(q,l)} &= \left\{ \omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)} \right\}, \\ L_{\omega^0}^{(l)} &= \left\{ \omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)} \right\}, L_{\omega^*}^{(q)} = \left\{ \omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)} \right\} \end{aligned}$$

з невідомими лініями розділу  $L_*^{(q)}, L_0^{(l)}$  (вздовж яких задані відповідні умови спряження):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \kappa_f \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^{(q,l)}, \\ \varphi(x_*^{(q)}, y_*^{(q)}) &= \varphi_*^{(q)}, \quad [\varphi] \Big|_{L_*^{(q)}} = 0, \quad \left[ \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] \Big|_{L_*^{(q)}} = 0, \quad q = \overline{1, s_1 - 1}, \\ \psi(x_*^{(l)}, y_*^{(l)}) &= \psi_*^{(l)}, \quad [\psi] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s_2 - 1}, \\ \varphi \Big|_{L_*} &= \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{L_0} = 0, \quad \psi \Big|_{L^0} = \\ &= \sum_{l=1}^{s_2} \int_{\tilde{L}_*^{(l)}} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ \kappa_f &= \frac{\tilde{\kappa}^{(q)} \cdot \tilde{\kappa}^{(l)}}{\mu_n}, \quad q = \overline{1, s_1}, \quad l = \overline{1, s_2}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де  $L_0$  і  $L^0$  — відповідно верхній і нижній береги розрізу  $\Gamma$ ,  $[f]$  — стрибок функції  $f$  при переході по нормалі через відповідну лінію,

$Q = \sum_{l=1}^{s_2} Q_l$  — повна фільтраційна витрата.

Обернена до (2), в сенсі [3], крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$  зводиться до задачі [1]:

$$\begin{cases}
\Delta x = 0, \Delta y = 0, (\varphi, \psi) \in G_{\omega}^{(q,l)}, \\
\left[ (x, y) \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}, \psi=\psi^{(l)}} = 0, \left[ \bar{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = \left[ \bar{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = 0, \\
\left[ \bar{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = \left[ \bar{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, q = \overline{1, s_1 - 1}, l = \overline{1, s_2 - 1}, \\
x(\varphi_*, \psi_*^{(l)}) = x_*^{(l)}, y(\varphi_*, \psi_*^{(l)}) = y_*^{(l)}, l = \overline{1, s_2 - 1}, \\
x(\varphi_*^{(q)}, \psi(x_*^{(q)}, y_*^{(q)})) = x_*^{(q)}, y(\varphi_*^{(q)}, \psi(x_*^{(q)}, y_*^{(q)})) = y_*^{(q)}, q = \overline{1, s_1 - 1}, \\
f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, 0 \leq \psi \leq Q, \\
x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi_*} = 0, \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\
Q = \sum_{l=1}^{s_2} Q_l, Q_l = \frac{\bar{\kappa}^{(l)}}{\mu_n} \int_0^{Q_l} \bar{\kappa} \left( \frac{\partial x}{\partial \psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial \psi}^2 \right) d\psi, J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi},
\end{cases} \quad (3)$$

де  $\Delta$  — оператор Лапласа.

**Різницьвий аналог і декомпозиція задачі.** Для знаходження розв'язку задачі (3) в області комплексного квазіпотенціалу визначимо сіткову область (так, щоб значення  $\varphi_*^{(q)}, \psi_*^{(l)}$  «потрапили» у її вузли)

$$G_{\omega}^{\gamma} = \bigcup_{q,l=1}^{s_1, s_2} G_{\omega}^{\gamma(q,l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_{\varphi} \cdot i, i = \overline{0, m+1}, \Delta_{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \right.$$

$$\left. \varphi_{m_i}^{(q)} = \varphi_*^{(q)}, q = \overline{1, s_1 - 1}, \psi_j = \Delta_{\psi} \cdot j, j = \overline{0, n+1}, \Delta_{\psi} = \frac{Q}{n+1}, \right.$$

$$\left. \psi_{n_l}^{(l)} = \psi_*^{(l)}, l = \overline{1, s_2 - 1}, m, m_i^{(q)}, n, n_l^{(l)} \in N \right\},$$

$$G_{\omega}^{\gamma(q,l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{\gamma}, i = \overline{m_{q-1}, m_q}, j = \overline{n_{l-1}, n_l} \right\} \text{ — шукані прямокутні підобласті } G_{\omega}^{\gamma},$$

що відповідають ділянкам сталості функції  $\kappa(x, y)$ ,

де  $\varphi_{m_q} = \varphi^{(q)} (q = \overline{1, s_1 - 1}, 0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{s_1} = m+1)$ ,  $\psi_{n_l} = \psi^{(l)}$

( $l = \overline{1, s_2 - 1}, 0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{s_2} = n+1, m_q, n_l \in N$ ),  $\gamma = \Delta_{\varphi} / \Delta_{\psi}$  —

квазіконформний інваріант.

Крайові умови, умови періодичності, умови ортогональності в околі границі області та значення функцій у точках вимірювання апроксимуємо, аналогічно [1–2]:

$$f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_{i,0} &= x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) &+ (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, \quad (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + \\ + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) &= 0, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) &+ (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2}) \times \\ \times (y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) &= 0, \quad (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + \\ + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1})(y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) &= 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{m_i^{(q)}, n_i^{(q)}} = x_{\bullet}^{(q)}, \quad y_{m_i^{(q)}, n_i^{(q)}} = y_{\bullet}^{(q)}, \quad x_{0, n_i^{(l)}} = x_{\bullet}^{(l)}, \quad y_{0, n_i^{(l)}} = y_{\bullet}^{(l)}, \quad (6) \\ q &= \overline{1, s_1 - 1}, \quad l = \overline{1, s_2 - 1}, \end{aligned}$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $\varphi(x_{m_i^{(q)}, n_i^{(q)}}), y_{m_i^{(q)}, n_i^{(q)}}) = \varphi_{\bullet}^{(q)}$ .

Розв'язки рівнянь Лапласа у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж вертикальних та горизонтальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо, аналогічно до [1], шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у багатопарових областях з вертикальними та горизонтальними лініями розділу. Для цього область  $G_{\omega}^{\gamma}$  «розіб'ємо» на дві групи (по горизонталі і по вертикалі) сіткових прямокутників з «накладками»:

$$G_{\omega}^{\gamma} = \bigcup_{q=1}^{s_1} \left( \bigcup_{l=1}^{s_2-1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{s_2} \left( \bigcup_{q=1}^{s_1-1} \tilde{\tilde{G}}_{q,l} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q,l} &= \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{\gamma} : \varphi_{m_{q-1}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m_q-1}, \psi_{n_{l-1}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n_{l+1}-1} \right\}, \\ \tilde{\tilde{G}}_{q,l} &= \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{\gamma} : \varphi_{m_{q-1}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m_{q+1}-1}, \psi_{n_{l-1}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n_l-1} \right\}. \end{aligned}$$

Отримаємо  $s_1(s_2 - 1) + s_2(s_1 - 1)$  проєкцій вихідної задачі (стосовно підобластей  $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ ) [1] для знаходження послідовностей сіткових функцій

$$\left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(1,l)}(\xi), \tilde{y}_{i,j}^{(1,l)}(\xi) \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(2,l)}(\xi), \tilde{y}_{i,j}^{(2,l)}(\xi) \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \dots,$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(s_1,l)}(\xi), \tilde{y}_{i,j}^{(s_1,l)}(\xi) \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty} \quad (l = \overline{1, s_2 - 1}): \quad \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}(\xi), \\
& \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}(\xi); \quad \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,1)}(\delta), \tilde{y}_{i,j}^{(q,1)}(\delta) \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty}, \quad \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,2)}(\delta), \tilde{y}_{i,j}^{(q,2)}(\delta) \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty}, \dots, \\
& \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,s_2)}(\delta), \tilde{y}_{i,j}^{(q,s_2)}(\delta) \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty} \quad (q = \overline{1, s_1 - 1}): \quad \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}(\delta), \\
& \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}(\delta),
\end{aligned}$$

де  $\xi, \delta$  — номери кроків ітераційних процесів, що є чисельними аналогами класичного методу К. Шварца.

Значення сіткових функцій  $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j}$  у внутрішніх вузлах прошарків  $\tilde{G}_{q,l}$  (тобто,  $\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}$ ) шукатимемо із різницьових рівнянь [2; 4] (тут і надалі, номери кроків  $\xi, \delta$  для спрощення викладок пропускаємо):

$$\begin{cases} \bar{\kappa}^{(l)} L_{\gamma} \tilde{x}_{i,j} + \gamma^2 \bar{\kappa}^{(l)} (\tilde{x}_{i,j-1} + \tilde{x}_{i,j+1}) = 0, & j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l - 1}, \\ \frac{\bar{\kappa}^{(l)} + \bar{\kappa}^{(l+1)}}{2} L_{\gamma} \tilde{x}_{i,n_l} + \gamma^2 (\bar{\kappa}^{(l)} \tilde{x}_{i,n_{l-1}} + \bar{\kappa}^{(l+1)} \tilde{x}_{i,n_{l+1}}) = 0, \\ \bar{\kappa}^{(l+1)} L_{\gamma} \tilde{x}_{i,j} + \gamma^2 \bar{\kappa}^{(l+1)} (\tilde{x}_{i,j-1} + \tilde{x}_{i,j+1}) = 0, & j = \overline{n_l + 1, n_{l+1} - 1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{\kappa}^{(l)} L_{\gamma} \tilde{y}_{i,j} + \gamma^2 \bar{\kappa}^{(l)} (\tilde{y}_{i,j-1} + \tilde{y}_{i,j+1}) = 0, & j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l - 1}, \\ \frac{\bar{\kappa}^{(l)} + \bar{\kappa}^{(l+1)}}{2} L_{\gamma} \tilde{y}_{i,n_l} + \gamma^2 (\bar{\kappa}^{(l)} \tilde{y}_{i,n_{l-1}} + \bar{\kappa}^{(l+1)} \tilde{y}_{i,n_{l+1}}) = 0, \\ \bar{\kappa}^{(l+1)} L_{\gamma} \tilde{y}_{i,j} + \gamma^2 \bar{\kappa}^{(l+1)} (\tilde{y}_{i,j-1} + \tilde{y}_{i,j+1}) = 0, & j = \overline{n_l + 1, n_{l+1} - 1}, \end{cases} \quad (8)$$

де  $L_{\gamma} u_{i,j} = u_{i+1,j} - 2(1 + \gamma^2) u_{i,j} + u_{i-1,j}$ ,  $\tilde{x}_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $\tilde{y}_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $(\varphi_i, \psi_j) \in \tilde{G}_{q,l}$ ,  $i = \overline{m_{q-1} + 1, m_q - 1}$ ,  $q = \overline{1, s_1}$ ,  $l = \overline{1, s_2 - 1}$ ;

а сіткових функцій  $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j}$  у прошарках  $\tilde{G}_{q,l}$  (тобто,  $\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}$ ) — із рівнянь [1; 4]:

$$\begin{aligned}
& L_{\gamma} \tilde{x}_{i,j} = 0, \quad L_{\gamma} \tilde{y}_{i,j} = 0, \quad i = \overline{m_{q-1} + 1, m_{q+1} - 1}, \\
& \bar{\kappa}^{(q+1)} (\tilde{x}_{m_q,j} - \tilde{x}_{m_q-1,j}) = \bar{\kappa}^{(q)} (\tilde{x}_{m_q+1,j} - \tilde{x}_{m_q,j}), \\
& \bar{\kappa}^{(q+1)} (\tilde{y}_{m_q,j} - \tilde{y}_{m_q-1,j}) = \bar{\kappa}^{(q)} (\tilde{y}_{m_q+1,j} - \tilde{y}_{m_q,j}),
\end{aligned} \quad (9)$$

де  $\tilde{x}_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $\tilde{y}_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $(\varphi_i, \psi_j) \in \tilde{G}_{q,l}$ ,  $j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l - 1}$ ,  $q = \overline{1, s_1 - 1}$ ,  $l = \overline{1, s_2}$ .

Розв'язки (7)–(9) представляємо відповідно формулами сумарних зображень [4–5]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k} \left( \mu_k^i \tilde{a}_k + \nu_k^i \tilde{b}_k + \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g,n_{l-1}} + \right. \\ \left. + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{x}_{g,n_{l+1}}) \right), \quad \tilde{y}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k} \left( \mu_k^i \tilde{c}_k + \nu_k^i \tilde{d}_k + \right. \\ \left. + \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{y}_{g,n_{l+1}}) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$i = \overline{m_{q-1}+1, m_q-1}, \quad j = \overline{n_{l-1}+1, n_{l+1}-1}, \quad \tilde{n}_l = n_{l+1} - n_{l-1} - 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\tilde{\tilde{n}}_l} \tilde{\tilde{p}}_{j-n_{l-1},k} \left( \frac{2\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}}{1+\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}} \mu_k^i \tilde{\tilde{a}}_k^{(q)} + \frac{2}{1+\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}} \nu_k^i \tilde{\tilde{b}}_k^{(q)} + \right. \\ \left. + \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(i,g) (\tilde{\tilde{p}}_{1,k} \tilde{\tilde{x}}_{g,n_{l-1}} + \tilde{\tilde{p}}_{\tilde{\tilde{n}}_l,k} \tilde{\tilde{x}}_{g,n_l}) \right), \\ \tilde{\tilde{y}}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\tilde{\tilde{n}}_l} \tilde{\tilde{p}}_{j-n_{l-1},k} \left( \frac{2\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}}{1+\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}} \mu_k^i \tilde{\tilde{c}}_k^{(q)} + \frac{2}{1+\tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)}} \nu_k^i \tilde{\tilde{d}}_k^{(q)} + \right. \\ \left. + \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(i,g) (\tilde{\tilde{p}}_{1,k} \tilde{\tilde{y}}_{g,n_{l-1}} + \tilde{\tilde{p}}_{\tilde{\tilde{n}}_l,k} \tilde{\tilde{y}}_{g,n_l}) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = \overline{m_{q-1}+1, m_{q+1}-1}, \quad \tilde{\tilde{\kappa}}^{(q)} = \tilde{\kappa}^{(q)} / \tilde{\kappa}^{(q+1)},$$

$$j = \overline{n_{l-1}+1, n_l-1}, \quad \tilde{\tilde{n}}_l = n_{l+1} - n_l - 1.$$

Тут елементи матриць  $P$ -трансформацій:

$$P_1 = [\tilde{p}_{j,k}]_{j,k=1}^{\tilde{n}_l}, \quad \tilde{p}_{j,k} = C_k \begin{cases} \sin j\theta_k, & j = \overline{n_{l-1}+1, n_l}, \\ \alpha_k \sin(\tilde{n}_l - j)\theta_k, & j = \overline{n_l+1, n_{l+1}-1}, \end{cases}$$

$\theta_k$  — корені рівняння  $\sin \tilde{n}_l \theta + \frac{\kappa_l - \kappa_{l+1}}{\kappa_l + \kappa_{l+1}} \sin(\tilde{n}_l - 2n_l) \theta = 0$  в інтервалі  $(0, \pi)$ ,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\sin n_l \theta_k}{\sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k}, & \text{якщо } \sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k \neq 0, \\ -\frac{\kappa_l \cos n_l \theta_k}{\kappa_{l+1} \cos(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k}, & \text{якщо } \sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k = 0, \end{cases}$$



$$C_k = \left[ \frac{\kappa_l}{2} \left( n_l - \frac{\cos(n_l - 1)\theta_k \sin n_l \theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\kappa_l + \kappa_{l+1}}{2} \sin^2 n_l \theta_k + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{l+1}}{2} \alpha_k^2 \left( \tilde{n}_l - n_l - \frac{\cos(\tilde{n}_l - n_l - 1)\theta_k \sin(\tilde{n}_l - n_l)\theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ P_2 = \left[ \tilde{p}_{j,k} \right]_{j,k=1}^{\tilde{n}_l}, \quad \tilde{p}_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2\tilde{n}_l + 1}} \sin \frac{jk\pi}{\tilde{n}_l + 1}.$$

Елементи діагональних матриць  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^N$ ,  $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^N$  ви-  
значаються за формулами:

$$\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \\ \eta_k = 1 + \tilde{\gamma}^2 \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{N+1} \right),$$

де  $N = \tilde{n}_l$  у (10) і  $N = \tilde{n}_l$  у (11). Функція  $\Phi(i, g)$  має вигляд:

$$\Phi(i, g) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu_k^{|i-g|} + \frac{1 - \tilde{\kappa}^{(q)}}{1 + \tilde{\kappa}^{(q)}} \nu_k^{2m_q - i - g}}{\mu_k - \nu_k}, g = \overline{m_{q-1} + 1, m_q - 1}, \\ \nu_k^{m_q - i} / \mu_k - \nu_k, \quad g = m_q, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q)}}{1 + \tilde{\kappa}^{(q)}} \nu_k^{g-i} / \mu_k - \nu_k, \quad g = \overline{m_q + 1, m_{q+1} - 1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = m_{q-1} + 1, \dots, \\ m_q, \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{1 + \tilde{\kappa}^{(q)}} \nu_k^{i-g} / \mu_k - \nu_k, \quad g = \overline{m_{q-1} + 1, m_q - 1}, \\ \nu_k^{i-m_q} / \mu_k - \nu_k, \quad g = m_q, \\ \frac{\nu_k^{|i-g|} + \frac{\tilde{\kappa}^{(q)} - 1}{\tilde{\kappa}^{(q)} + 1} \nu_k^{i+g-2m_q}}{\mu_k - \nu_k}, g = \overline{m_q + 1, m_{q+1} - 1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = m_q + 1, \dots, \\ m_{q+1} - 1. \end{array}$$

Сталі  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k, \tilde{d}_k$  ( $k = \overline{1, \tilde{n}_l}$ ) знаходяться із крайових умов на ділянках границь  $L_*^{(l)} \cup L_*^{(l+1)}, L^{*(l)} \cup L^{*(l+1)}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{a}_k + \tilde{b}_k &= \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k}^* \tilde{x}_{m_{q-1},j} - \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{x}_{g,n_{l+1}}), \\ \mu_k^{m_q} \tilde{a}_k + v_k^{m_q} \tilde{b}_k &= \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k}^* \tilde{x}_{m_q,j} - \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^{m_q-g}}{\mu_k - v_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{x}_{g,n_{l+1}}), \\ \tilde{c}_k + \tilde{d}_k &= \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k}^* \tilde{y}_{m_{q-1},j} - \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{y}_{g,n_{l+1}}), \\ \mu_k^{m_q} \tilde{c}_k + v_k^{m_q} \tilde{d}_k &= \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k}^* \tilde{y}_{m_q,j} - \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^{m_q-g}}{\mu_k - v_k} (\tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{y}_{g,n_{l+1}}), \end{aligned} \right.$$

а сталі.  $\tilde{a}_k^{(q)}, \tilde{b}_k^{(q)}, \tilde{c}_k^{(q)}, \tilde{d}_k^{(q)}$  ( $k = \overline{1, \tilde{n}_l}$ ) знаходяться ітераційно із граничних умов на лініях розділу:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2\tilde{\kappa}^{(q)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} \mu_k^{m_{q-1}} \tilde{a}_k^{(q)(\delta)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} v_k^{m_{q-1}} \tilde{b}_k^{(q)(\delta)} &= \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{x}_{m_{q-1},j}^{(\delta-1)} - S_k, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} \mu_k^{m_q} \tilde{a}_k^{(q)(\delta)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} v_k^{m_q} \tilde{b}_k^{(q)(\delta)} &= \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{x}_{m_q+1,j}^{(\delta-1)} - S'_k, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} \mu_k^{m_{q-1}} \tilde{c}_k^{(q)(\delta)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} v_k^{m_{q-1}} \tilde{d}_k^{(q)(\delta)} &= \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{y}_{m_{q-1},j}^{(\delta-1)} - S''_k, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} \mu_k^{m_q} \tilde{c}_k^{(q)(\delta)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q)}} v_k^{m_q} \tilde{d}_k^{(q)(\delta)} &= \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{y}_{m_q+1,j}^{(\delta-1)} - S'''_k, \end{aligned} \right.$$

де

$$\begin{aligned} S_k &= \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q-1}, g) (\tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{x}_{g,n_l}), \\ S'_k &= \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q+1}, g) (\tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{x}_{g,n_l}), \\ S''_k &= \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q-1}, g) (\tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{y}_{g,n_l}), \\ S'''_k &= \gamma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q+1}, g) (\tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g,n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_l,k} \tilde{y}_{g,n_l}), \end{aligned}$$

$\tilde{p}_{j,k}^* (j, k = \overline{1, \tilde{n}_l})$  — елементи матриць  $P_1^*$  і  $P_2^*$ , обернених до  $P_1$  і  $P_2$  відповідно.

**Алгоритм розв'язання.** Як відомо [6–8], задачі на ідентифікацію параметрів (обернені задачі), загалом, є некоректно поставленими і потребують накладання додаткових умов (умов перевизначення).

Опишемо в загальних рисах розроблений алгоритм визначення характерних значень потенціалу  $\varphi^{(q)}$  ( $q = \overline{1, s_1 - 1}$ ) на шуканих еквіпотенціальних лініях розділу  $L_*^{(q)}$  підобластей сталості коефіцієнта проникності, значень локальних витрат  $Q_l$  ( $l = \overline{1, s_2}$ ) у підобластях сталості коефіцієнта проникності, що обмежені шуканими лініями течії  $L_0^{(l)}$ , та ідентифікації значень  $\kappa(x, y) = \hat{\kappa}^{(q)} \cdot \tilde{\kappa}^{(l)}$  у цих підобластях, якщо відомими є значення потенціалу  $\varphi_*^{(q)}$ , що задовольняють (1), у точках  $R_*^{(q)}(x_*^{(q)}, y_*^{(q)})$  ( $q = \overline{1, s_1}$ ) і значення витрат (потоків)  $Q_*^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s_2}$ ) через ділянки  $L_*^{(l)}$  границі  $L_*$  між заданими точками  $H_*^{(l-1)}(x_*^{(l-1)}, y_*^{(l-1)})$  і  $H_*^{(l)}(x_*^{(l)}, y_*^{(l)})$  (тобто, значення функції течії  $\psi_*^{(l)}$ , що задовольняють (1), у точках  $H_*^{(l)}(x_*^{(l)}, y_*^{(l)})$ ). Його сконструйовано шляхом поетапної параметризації значень коефіцієнта проникності, характерних значень потенціалу і функції течії та координат граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  ( $i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, n+1}$ ) з використанням ідей методу блочної ітерації [3] та декомпозиції задачі.

Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$ , вимірних потенціалів  $\varphi_*^{(q)}$  ( $q = \overline{1, s_1}$ ) і витрат  $Q_*^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s_2}$ ) та координати точок вимірювання  $R_*^{(q)}$  ( $q = \overline{1, s_1}$ ),  $H_*^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s_2}$ ). Задаємо параметри точності обчислень, кількість  $m \times n$  вузлів розбиття і формуємо сітку  $G_\omega^\gamma$  (так, щоб значення  $\varphi_*^{(q)}$ ,  $\psi_*^{(l)}$  «потрапили» у її вузли), знаходимо значення конформного інваріанту  $\gamma$ . Задаємо початкові наближення значень коефіцієнта проникності  $\hat{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)}$  ( $q = \overline{1, s_1}, l = \overline{1, s_2}$ ), значень  $\varphi^{(q)}$  ( $q = \overline{1, s_1 - 1}$ ) і  $\psi^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s_2 - 1}$ ) з урахуванням (1), визначаємо початкові наближення  $m_q = \varphi^{(q)} / \Delta_\varphi$ ,  $n_l = \psi^{(l)} / \Delta_\psi$ ,  $Q_l = \psi^{(l)} - \psi^{(l-1)}$ . Також задаємо початкові значення функцій  $x$ ,  $y$  у граничних вузлах сіткової області з урахуванням крайових умов (4) та заданих точок вимірювання (6), «підправляємо» початкові значення  $\hat{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)}$ , наприклад, за формулами:

$$\hat{\kappa}^{(q)} = \frac{Q_*^{(1)} \mu_n}{\tilde{\kappa}^{(1)}} \left( \sqrt{\left( \frac{\varphi_*^{(q)} - \varphi_*^{(q-1)}}{x_*^{(q)} - x_*^{(q-1)}} \right)^2 + \left( \frac{\varphi_*^{(q)} - \varphi_*^{(q-1)}}{y_*^{(q)} - y_*^{(q-1)}} \right)^2} \right)^{-1}, \quad q = \overline{1, s_1},$$

$$\bar{\kappa}^{(l)} = \frac{\mathcal{Q}^{(l)} \mu_n}{\bar{\kappa}^{(l)}} \left( \sqrt{\left( \frac{\varphi_*^{(l)} - \varphi_*}{x_*^{(l)} - x_*^{(l-1)}} \right)^2} + \left( \frac{\varphi_*^{(l)} - \varphi_*}{y_*^{(l)} - y_*^{(l-1)}} \right)^2 \right)^{-1}, \quad l = \overline{1, s_2}.$$

Значення функцій  $x$ ,  $y$  у внутрішніх вузлах сітки отримуємо як результат ітераційного наближення  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  функціями  $\tilde{x}_{i,j}$ ,  $\tilde{y}_{i,j}$ ,  $\tilde{\tilde{x}}_{i,j}$ ,  $\tilde{\tilde{y}}_{i,j}$ , що обчислюються шляхом послідовних ітераційних процесів по  $\xi$ ,  $\delta$  за формулами сумарних зображень (10), (11). При цьому, значення граничних вузлів у підобластях  $\tilde{G}_{q,l}$ ,  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  визначаються як значення внутрішніх вузлів (вздовж відповідних вертикальних та горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей з «накладками». Зазначимо, що описана процедура видається досить громіздкою, бо містить потрійний ітераційний процес, проте, насправді, достатньо провести лише кілька ітерацій для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цієї обчислювальної процедури при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Зауважимо також, що цей обчислювальний процес природнім чином розпаралелюється, оскільки розрахунки у прошарках  $\tilde{G}_{q,l}$  і  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних мережевих технологій.

Далі, перераховуємо значення коефіцієнта проникності, фіксуючи почергово  $\bar{\kappa}^{(q)}$  і  $\bar{\kappa}^{(l)}$ , за системою рівнянь, яку отримуємо із умови «конформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей (динамічної сітки у фізичній області і розрахункової сітки у відповідній області комплексного квазіпотенціалу):

$$\begin{cases} \bar{\kappa}^{(q)} = \frac{\mu_n}{\gamma(m_q - m_{q-1})(n+1)} \sum_{l=1}^{s_2} \left( \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\bar{\kappa}^{(l)}} \right), \\ \bar{\kappa}^{(l)} = \frac{\mu_n}{\gamma(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{q=1}^{s_1} \left( \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\bar{\kappa}^{(q)}} \right), \\ \bar{\kappa}^{(q,l)} = \bar{\kappa}^{(q)} \cdot \bar{\kappa}^{(l)} = \frac{\mu_n}{\gamma(m_q - m_{q-1})(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \gamma_{i,j}, \end{cases} \quad (12)$$

де

$$\gamma_{i,j} = \frac{\bar{\gamma}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j+1}}{\bar{\gamma}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i+1,j}}, \quad \bar{\gamma}_{i,j} = \sqrt{\left( x_{i+1,j} - x_{i,j} \right)^2 + \left( y_{i+1,j} - y_{i,j} \right)^2},$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \quad q = \overline{1, s_1}, l = \overline{1, s_2}.$$

Перераховуємо значення функцій  $x$ ,  $y$  у граничних вузлах за формулами (4)–(6) та знаходимо нове наближення  $x$ ,  $y$  шляхом ітераційних процесів у прошарках  $\tilde{G}_{q,l}$ ,  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  у внутрішніх вузлах сітки, перераховуємо  $\tilde{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)}$  за системою (12).

Далі, знаходимо у підобластях  $G_{\omega}^{\gamma(q,l)}$  розрахункові значення  $\tilde{\gamma}_{q,l}$  за формулами:

$$\tilde{\gamma}_{q,l} = \frac{\mu_n}{(m_q - m_{q-1})(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa^{(q,l)}}, \quad (13)$$

та порівнюємо їх із  $\gamma = \Delta_{\varphi} / \Delta_{\psi}$ . Враховуючи монотонну залежність  $Q$  (а, отже, і  $\gamma$ ) від різниці потенціалів і співвідношення між  $\tilde{\kappa}^{(q-1)}$  і  $\tilde{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l-1)}$  і  $\tilde{\kappa}^{(l)}$ , «уточнюємо» значення  $\varphi^{(q)}$  і  $\psi^{(l)}$ , змінюючи відповідним чином  $m_q$  і  $n_l$  до тих пір, поки значення  $|\tilde{\gamma}_{q,l} - \gamma|$  не стане мінімальним (почергово фіксуючи відповідні значення  $m_q$  і  $n_l$ ): у випадку  $\tilde{\kappa}^{(q-1)} > \tilde{\kappa}^{(q)}$  — якщо  $\tilde{\gamma}_{q,l} < \gamma$ , то  $m_q$  необхідно зменшувати, інакше — збільшувати, а у випадку  $\tilde{\kappa}^{(q-1)} < \tilde{\kappa}^{(q)}$  — навпаки (для  $n_l$  — аналогічно).

Основний (зовнішній) ітераційний цикл містить такі кроки: уточнюємо значення функцій  $x$ ,  $y$  у граничних вузлах за формулами (4)–(6); знаходимо нове наближення значень функцій  $x$ ,  $y$  у внутрішніх вузлах сітки шляхом ітераційних процесів по прошарках  $\tilde{G}_{q,l}$ ,  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ ; перераховуємо значення  $\tilde{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)}$  за системою (12); знаходимо розрахункові значення  $\tilde{\gamma}_{q,l}$  за (13) та «підправляємо» значення  $\varphi^{(q)}$  і  $\psi^{(l)}$ . Умови завершення алгоритму визначаються аналогічно до [1–3].

**Результати розрахунків. Числові розрахунки** проведених за зробленим алгоритмом для елемента продуктивного пласта — області  $G_z$ , що обмежена еліптичним контуром  $L^* = \{x + iy : x = 500 \cos(t), y = 400 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$  та діючою свердловиною  $L_* = \{x + iy : x = 15 \cos(t) + 100, y = 15 \sin(t) + 50, 0 \leq t < 2\pi\}$  і містить чотири не діючі (вплив яких на процес ігнорується) свердловини, що моделюються точками  $R_*^{(1)}(20, 45)$ ,  $R_*^{(2)}(200, -80)$ ,  $R_*^{(3)}(140, 250)$ ,  $R_*^{(4)}(-270, -200)$ ,

в яких є можливість виміряти відповідні значення потенціалу  $\varphi^{(q)}$  ( $q = \overline{1,4}$ ). На контурі свердловини  $L_*$  також задані чотири точки  $H_*^{(1)}(100,65)$ ,  $H_*^{(2)}(85,50)$ ,  $H_*^{(3)}(100,35)$ ,  $H_*^{(4)}(115,50)$ , через ділянки між якими є можливість виміряти відповідні значення фільтраційних витрат  $Q_*^{(l)}$  ( $l = \overline{1,4}$ ). На рис. 1 наведені отримані в результаті проведених розрахунків динамічні сітки та ідентифіковані значення коефіцієнта проникності  $\tilde{\kappa}^{(q)}$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)}$ , характерних значень потенціалу  $\varphi^{(q)}$  і значень фільтраційних витрат  $Q_l$  при  $\mu_n = 1$ ,  $\tilde{\kappa}^{(l)} = 1$  (а, б), розбитті області  $m \times n = 50 \times 95$ , заданих значеннях граничних потенціалів  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ , точності обчислень  $\varepsilon = 10^{-6}$  і рівня конформності відображення [1]  $\delta_* = 0.01$ .

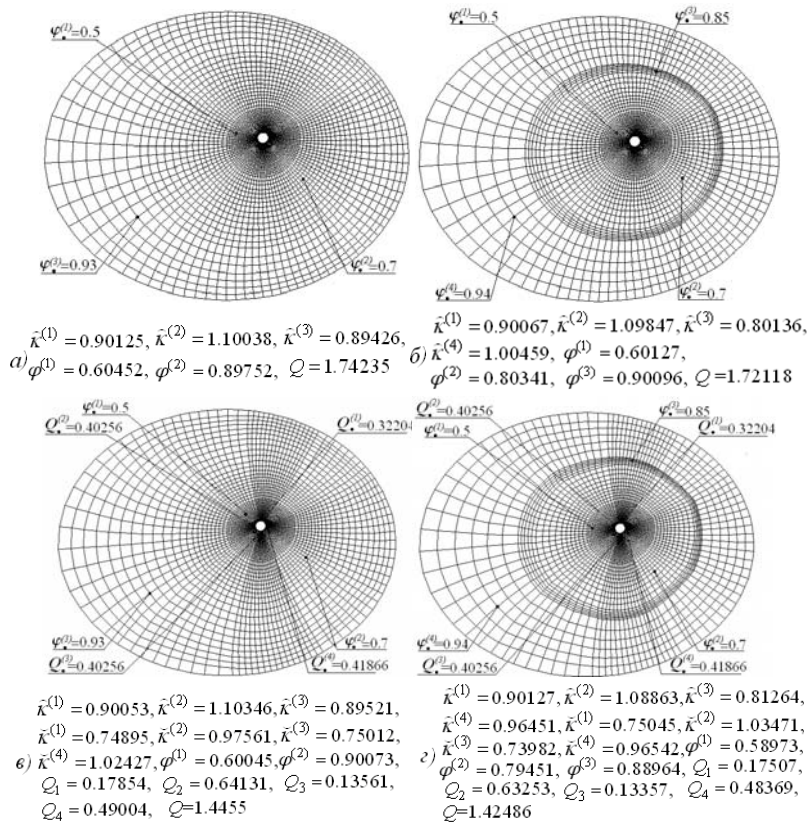


Рис. 1. Розраховані динамічні сітки та ідентифіковані значення

Як показують результати розрахунків максимальна відносна похибка ідентифікованих значень у порівнянні з отриманими із прямої задачі ( $\hat{\kappa}^{(1)} = \hat{\kappa}^{(3)} = 0.9$ ,  $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$ ,  $\varphi^{(1)} = 0.6$ ,  $\varphi^{(2)} = 0.9$  (а),  $\hat{\kappa}^{(1)} = 0.9$ ,  $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$ ,  $\hat{\kappa}^{(3)} = 0.8$ ,  $\hat{\kappa}^{(4)} = 1$ ,  $\varphi^{(1)} = 0.6$ ,  $\varphi^{(2)} = 0.8$ ,  $\varphi^{(3)} = 0.9$  (б),  $\hat{\kappa}^{(1)} = \hat{\kappa}^{(3)} = 0.9$ ,  $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$ ,  $\check{\kappa}^{(1)} = \check{\kappa}^{(3)} = 0.75$ ,  $\check{\kappa}^{(2)} = \check{\kappa}^{(4)} = 1$ ,  $\varphi^{(1)} = 0.6$ ,  $\varphi^{(2)} = 0.9$ ,  $Q_1 = 0.18$ ,  $Q_2 = 0.65$ ,  $Q_3 = 0.13$ ,  $Q_4 = 0.5$  (в),  $\hat{\kappa}^{(1)} = 0.9$ ,  $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$ ,  $\hat{\kappa}^{(3)} = 0.8$ ,  $\hat{\kappa}^{(4)} = 1$ ,  $\check{\kappa}^{(1)} = \check{\kappa}^{(3)} = 0.75$ ,  $\check{\kappa}^{(2)} = \check{\kappa}^{(4)} = 1$ ,  $\varphi^{(1)} = 0.6$ ,  $\varphi^{(2)} = 0.8$ ,  $\varphi^{(3)} = 0.9$ ,  $Q_1 = 0.175$ ,  $Q_2 = 0.6$ ,  $Q_3 = 0.13$ ,  $Q_4 = 0.5$  (г)) становить  $\approx 0.5\%$ , що є цілком прийнятним для технічних задач.

**Висновки.** Розроблено новий ефективний конструктивний підхід до математичного моделювання нелінійних фільтраційних процесів, а також метод розв'язання відповідних модельних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для двозв'язних нелінійно двояко-шаруватих криволінійних областей, обмежених еквіпотенціалами, за умов ідентифікації кусково-сталих значень коефіцієнта провідності, характерних значень потенціалу і значень локальних витрат на відповідно еквіпотенціальних лініях і лініях течії, що розділяють шари. Використання синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції для такого класу задач суттєво пришвидшує досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій, у значній мірі дозволяє уникати накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації. Розроблені алгоритми дають змогу розпаралелювати обчислювальний процес, що в перспективі дозволить значно підвищити ефективність запропонованого підходу.

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А. Я. Бомба, О. М. Гладка // Журнал обчисл. та прикладн. матем. — К., 2013. — №1 (111). — С. 35–45.
2. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А. Я. Бомба, О. М. Гладка // Фіз.-мат. моделюв. та інформаційні технології. — Львів, 2013. — № 18. — С. 32–42.
3. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.
4. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. — К. : Наук. думка, 1973. — 264 с.
5. Положий Г. М. Об одном классе формул суммарных представлений / Г. М. Положий, А. А. Скоробагатько // Прикл. матем. и мех. — 1965. — Вып. 1. — С. 20–40.

6. Vogel C. R. Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 183 p.
7. Bruckner G. An inverse problem from the 2D-groundwater modelling / G. Bruckner, S. Handrock-Meyer, H. Langmach — Berlin : WIAS-Preprint, 1997. — № 343.
8. Chan T. F. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients / T. F. Chan, X.-C. Tai — UCLA, Math. Depart. — CAM-report 03-15, 2003.

The new efficient constructive approach to mathematical modeling of the displacement of hydrocarbons from formation in conditions mutual influence the characteristics of the process and the medium and identification of model parameters was developed on the basis the synthesis of numerical methods complex analysis and summary representations in conjunction with decomposition of problem.

**Key words:** *quasiconformal mappings, complex quasipotential, summary representations method, decomposition of problem, parameters identification.*

Отримано: 19.06.2014

УДК 004.421:519.64

Д. А. Верлань\*, аспирант,

В. А. Тихоход\*\*, канд. техн. наук

\* Киевский национальный университет  
имени Тараса Шевченко, г. Киев,

\*\* Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт», г. Киев

## АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Рассмотрены вопросы численной реализации интегральных динамических моделей путем применения квадратурных формул закрытого типа повышенной точности. Предложены рекуррентные алгоритмы решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и их систем.

**Ключевые слова:** *интегральные динамические модели, квадратурные формулы, рекуррентные алгоритмы, алгоритмы решения интегральных уравнений.*

**Введение.** Математические модели различных объектов в форме нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра представляют собой эффективный аппарат для решения многих теоретических и практических задач исследования широкого класса динамических объектов [1; 2]. Наиболее распространенные численные алгоритмы решения дан-